Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

О. А. Кононова,
Н. И. Ильинкова,
Н. К. Филиппова

Метод Коши для линейного неоднородного уравнения

учебно-методическая разработка

Минск
2015

УДК 517.9(075.8)
К 647

Решение о депонировании документа вынес
Совет физического факультета БГУ, протокол №8 от 30.04.2015 г.

Авторы : доценты кафедры высшей математики и математической физики, кандидаты физико-математических наук : О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова.

Рецензенты:
Белявский С.С. канд. физ-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ;
Альсевич Л. А. канд. физ-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ФПМИ БГУ.

Кононова, О. А. Метод Коши для линейного неоднородного уравнения : учебно-методическая разроботка / О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова ; БГУ, Физический фак. , Каф. высшей математики и математической физики . – Минск : БГУ, 2015. – 11 с. – Библиогр.: с. 11.

Реферат (аннотация): В учебно-методической разработке «Метод Коши для линейного неоднородного уравнения» изложены теоретические сведения о методе Коши для линейного неоднородного уравнения n–го порядка. Учебно-методическая разработка содержит достаточно большое количество примеров с подробным описанием решения, что делает изложенный материал полезным, как для студентов дневной формы обучения, так и заочной. Также пособие может быть полезно преподавателям при организации контрольно-самостоятельной работы студентов физико-математических специальностей по дисциплине «Дифференциальные уравнения».

Из общей теории линейных неоднородных уравнений n-го порядка известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения

$$L[y] = f(x) \tag{1}$$

есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$L[z] = 0 \tag{2}$$

и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения.

То есть общее решение (1), можно записать следующей формулой:

$$y = Y + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i, \tag{3}$$

где Y частное решение (1), а $z_i, i = \overline{1,n}$ фундаментальная система решений уравнения (2).

В данной методической работе рассматривается нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка методом Коши.

Метод Коши

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (2). Построим решение однородного уравнения (2), удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$z = 0,\ z' = 0,\ z^{(n-2)} = 0,\ z^{(n-1)} = 1 \text{ при } x = \alpha, \tag{4}$$

где α – любая заданная точка из интервала (a,b) (интервал непрерывности коэффициентов уравнения (1)).

Это решение будет зависеть от α, т.е. $z = \varphi(x,\alpha) \quad x,\alpha \in (a,b)$.

Тогда функция

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha) \cdot f(\alpha) d\alpha, \quad \forall x_0 \in (a,b) \tag{5}$$

является частным решением неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными значениями искомой функции и всех ее производных до $(n-1)$ порядка включительно. Формула (5) называется формулой Коши для неоднородного уравнения (1).

Таким образом, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,\alpha) \cdot f(\alpha) d\alpha \tag{6}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + k^2 y = f(x)$

Решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z'' + k^2 z = 0$, имеет вид:

$$z = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx .$$

Найдем $z = \varphi(x,\alpha)$ из условий $z = 0,\ z' = 1$ при $x = \alpha, \quad \forall\alpha$.

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cos k\alpha + c_2 \sin k\alpha \\ 1 = -c_1 k \sin k\alpha + c_2 k \cos k\alpha \end{cases}$$

Откуда получим: $c_1 = -\frac{1}{k}\sin k\alpha, \quad c_2 = -\frac{1}{k}\cos k\alpha$. Подставив, полученные значения в общее решение однородного уравнения, имеем

$$\varphi(x,\alpha) = \frac{1}{k}\sin k(x-\alpha) \ .$$

Следовательно, основываясь на (5) получим частное решение

$$Y(x) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} \sin k(x-\alpha)\cdot f(\alpha)d\alpha \ .$$

Общее решение неоднородного уравнения по формуле (6) имеет вид:

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} \sin k(x-\alpha)\cdot f(\alpha)d\alpha$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - k^2 y = f(x)$

Решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z'' - k^2 z = 0$, имеет вид:

$$z = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx},$$

Найдем для данного уравнения функцию $z = \varphi(x,\alpha)$, для этого из условий (4) получим систему:

$$\begin{cases} 0 = c_1 e^{k\alpha} + c_2 e^{-k\alpha} \\ 1 = c_1 k e^{k\alpha} - c_2 k e^{-k\alpha} \end{cases}$$

Решением системы являются следующие константы $c_1 = \frac{e^{-k\alpha}}{2k}, \quad c_2 = -\frac{e^{k\alpha}}{2k}$. Подставив, полученные значения в общее решение однородного уравнения, имеем

$$\varphi(x,\alpha) = \frac{1}{2k}\left[e^{k(x-\alpha)} - e^{-k(x-\alpha)}\right] = \frac{1}{k}\mathrm{s}hk(x-\alpha),$$

Тогда частное решение имеет вид

$$Y(x)=\frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{s}hk(x-\alpha)\cdot f(\alpha)d\alpha\,.$$

По формуле (6) в ответе получим

$$y=c_1e^{k\alpha}+c_2e^{-k\alpha}+\frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{s}hk(x-\alpha)\cdot f(\alpha)d\alpha\,.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''+ky'=f(x)$

Решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z''+kz=0$ имеет вид

$$z=c_1+c_2e^{-kx},$$

Аналогично предыдущим примерам найдем для данного уравнения функцию $\varphi(x,\alpha)$ из условий:

$$\begin{cases} c_1+c_2e^{-k\alpha}=0 \\ -c_2ke^{-k\alpha}=1 \end{cases}$$

Тогда $c_1=\dfrac{1}{k},\quad c_2=-\dfrac{e^{k\alpha}}{k}$, следовательно

$$\varphi(x,\alpha)=\frac{1}{k}\left[1-e^{-k(x-\alpha)}\right] \text{ и } Y=\frac{1}{k}\int\limits_{x_{0,}}^{x}(1-e^{-k(x-\alpha)})\cdot f(\alpha)d\alpha,\ \forall x_0$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y=c_1+c_2e^{-kx}+\frac{1}{k}\int\limits_{x_{0,}}^{x}(1-e^{-k(x-\alpha)})\cdot f(\alpha)d\alpha,\ \forall x_0\,.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y''+ay'+by=f(x)$

Решение.

Составим соответствующее однородное уравнение $z''+az'+bz=0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda a+b=0$ имеет два действительных корня $\lambda_1=k_1,\lambda_2=k_2$. Общее решение $z=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$.

Аналогично найдем для данного уравнения функцию $\varphi(x,\alpha)$ из условий:

$$\begin{cases} c_1e^{k_1\alpha}+c_2e^{k_2\alpha}=0 \\ c_1k_1e^{k_1\alpha}+c_2k_2e^{k_2\alpha}=1 \end{cases}$$

Откуда $c_1=-\dfrac{e^{-k_1\alpha}}{k_2-k_1},\quad c_2=\dfrac{e^{-k_2\alpha}}{k_2-k_1}$, следовательно

$$\varphi(x,\alpha)=\frac{1}{k_2-k_1}\left[e^{k_2(x-\alpha)}-e^{k_1(x-\alpha)}\right] \text{ и } Y=\frac{1}{k_2-k_1}\int\limits_{x_0}^{x}[e^{k_2(x-\alpha)}-e^{k_1(x-\alpha)}]\cdot f(\alpha)d\alpha$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \frac{1}{k_2 - k_1}\int\limits_{x_0}^{x}[e^{k_2(x-\alpha)} - e^{k_1(x-\alpha)}]\cdot f(\alpha)d\alpha$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y''' + k^2 y' = f(x)$.

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z''' + k^2 z' = 0$ имеет вид:

$$z(x) = c_1 + c_2 \sin kx + c_3 \cos kx$$

Найдем для данного уравнения функцию $z = \varphi(x,\alpha)$, для этого из условий (4) получим систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \sin k\alpha + c_3 \cos k\alpha = 0 \\ c_2 k \cos k\alpha - c_3 k \sin k\alpha = 0 \\ -k^2 c_2 \sin k\alpha - k^2 c_3 \cos k\alpha = 1 \end{cases}$$

Откуда $c_1 = \frac{1}{k^2}$, $\quad c_2 = -\frac{\sin k\alpha}{k^2}, c_3 = -\frac{\cos k\alpha}{k^2}$, следовательно,

$\varphi(x,\alpha) = \frac{1}{k^2}(1 - \cos k(x-\alpha))$ и $Y = \frac{1}{k^2}\int\limits_{x_0}^{x}(1 - \cos k(x-\alpha))\cdot f(\alpha)d\alpha$.

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = c_1 + c_2 \sin kx + c_3 \cos kx + \frac{1}{k^2}\int\limits_{x_0}^{x}(1 - \cos k(x-\alpha))\cdot f(\alpha)d\alpha$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y''' - k^2 y' = f(x)$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z''' - k^2 z' = 0$ имеет вид:

$$z = c_1 + c_2 e^{kx} + c_3 e^{-kx}.$$

Аналогично примеру 5, для данного уравнения функция $\varphi(x,\alpha)$ находится из условий:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 e^{k\alpha} + c_3 e^{-k\alpha} = 0 \\ c_2 k e^{k\alpha} - c_3 k e^{-k\alpha} = 0 \\ c_2 k^2 e^{k\alpha} + c_3 k^2 e^{-k\alpha} = 1 \end{cases}$$

Тогда $c_1 = -\frac{1}{k^2}$, $\quad c_2 = \frac{e^{-k\alpha}}{2k^2}$, $\quad c_3 = \frac{e^{k\alpha}}{2k^2}$, следовательно

$$\varphi(x,\alpha) = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k^2}\left[e^{k(x-\alpha)} + e^{-k(x-\alpha)}\right] = \frac{1}{k^2}[1 - chk(x-\alpha)] \text{ и}$$

$$Y = \frac{1}{k^2}\int\limits_{x_{0,}}^{x}(-1 + chk(x-\alpha))\cdot f(\alpha)d\alpha.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y=c_1+c_2e^{kx}+c_3e^{-kx}+\frac{1}{k^2}\int\limits_{x_0,}^{x}(-1+chk(x-\alpha))\cdot f(\alpha)d\alpha.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'''+ky''=f(x)$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z'''+kz''=0$ имеет вид:

$$z=c_1+c_2x+c_3e^{-kx},$$

Аналогично примеру 5, для данного уравнения функция $\varphi(x,\alpha)$ находится из условий:

$$\begin{cases} c_1+c_2\alpha+c_3e^{-k\alpha}=0 \\ c_2-c_3ke^{-k\alpha}=0 \\ c_3k^2e^{-k\alpha}=1 \end{cases}$$

Тогда $c_1=-\frac{1}{k^2}(1+k\alpha),\quad c_2=\frac{1}{k},\quad c_3=\frac{e^{k\alpha}}{k^2}$, следовательно,

$$\varphi(x,\alpha)=-\frac{1}{k^2}(1+k\alpha)+\frac{x}{k}+\frac{1}{k^2}e^{-k(x-\alpha)}\ \text{ и}$$

$$Y=\frac{1}{k^2}\int\limits_{x_0,}^{x}(-1-k\alpha+kx+e^{-k(x-\alpha)})\cdot f(\alpha)d\alpha.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-kx}+\frac{1}{k^2}\int\limits_{x_0,}^{x}(-1-k\alpha+kx+e^{-k(x-\alpha)})\cdot f(\alpha)d\alpha,\quad \forall x_0$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'''-3y''+3y'-y=f(x)$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z'''-3z''+3z'-z=0$ имеет вид:

$$z=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x,$$

Аналогично примеру 5, для данного уравнения функция $\varphi(x,\alpha)$ находится из условий:

$$\begin{cases} c_1e^\alpha+c_2\alpha e^\alpha+c_3\alpha^2e^\alpha=0 \\ c_1e^\alpha+c_2\alpha e^\alpha+c_2e^\alpha+c_3\alpha^2e^\alpha+2c_3\alpha e^\alpha=0 \\ c_1e^\alpha+c_2\alpha e^\alpha+2c_2e^\alpha+4c_3\alpha e^\alpha+2c_3e^\alpha+c_3\alpha^2e^\alpha=1 \end{cases}$$

Тогда $c_1=\frac{\alpha^2}{2},\quad c_2=-\alpha e^{-\alpha},\quad c_3=\frac{e^{-\alpha}}{2}$, следовательно,

$$\varphi(x,\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}e^{(x-\alpha)}-\alpha xe^{(x-\alpha)}+\frac{1}{2}x^2e^{(x-\alpha)}\ \text{ и }\ Y=\frac{1}{2}\int\limits_{x_0,}^{x}[\alpha^2-2\alpha x+x^2]e^{x-\alpha}\cdot f(\alpha)d\alpha.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{2}\int\limits_{x_{0,}}^{x}[\alpha^2 - 2\alpha x + x^2]e^{x-\alpha}\cdot f(\alpha)d\alpha =$$

$$= c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{2}\int\limits_{x_{0,}}^{x}(x-\alpha)^2e^{x-\alpha}\cdot f(\alpha)d\alpha, \quad \forall x_0$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y^{(IV)} - k^2y'' = f(x)$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z^{(IV)} - k^2z'' = 0$ имеет вид:

$$z = c_1 + c_2x + c_3e^{kx} + c_4e^{-kx},$$

Найдем для данного уравнения функцию $z = \varphi(x,\alpha)$, для этого из условий (4) получим систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\alpha + c_3e^{k\alpha} + c_4e^{-k\alpha} = 0 \\ c_2 + c_3ke^{k\alpha} - c_4ke^{-k\alpha} = 0 \\ c_3k^2e^{k\alpha} + c_4k^2e^{-k\alpha} = 0 \\ c_3k^3e^{k\alpha} - c_4k^3e^{-k\alpha} = 1 \end{cases}$$

Тогда $c_3 = \dfrac{e^{-k\alpha}}{2k^3}, \quad c_4 = -\dfrac{e^{k\alpha}}{2k^3}, \quad c_2 = -\dfrac{1}{k^2}, \quad c_1 = \dfrac{\alpha}{k^2}$, следовательно,

$$\varphi(x,\alpha) = \frac{\alpha}{k^2} - \frac{x}{k^2} + \frac{1}{2k^3}e^{k(x-\alpha)} - \frac{1}{2k^3}e^{-k(x-\alpha)} - \alpha xe^{(x-\alpha)} + \frac{1}{2}x^2e^{(x-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{k^2}(\alpha - x) + \frac{1}{k^3}shk(x-\alpha)$$

И по формуле (5), $Y = \int\limits_{x_{0,}}^{x}[\frac{1}{k^2}(\alpha - x) - \frac{1}{k^3}shk(x-\alpha)]\cdot f(\alpha)d\alpha.$

Общее решение имеет вид:

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{kx} + c_4e^{-kx} + \int\limits_{x_{0,}}^{x}[\frac{1}{k^2}(\alpha - x) - \frac{1}{k^3}shk(x-\alpha)]\cdot f(\alpha)d\alpha, \quad \forall x_0$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y^{(IV)} + ky''' = f(x)$.

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z^{(IV)} + kz''' = 0$ имеет вид:

$$z = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-kx},$$

Аналогично примеру 9, для данного уравнения функция $\varphi(x,\alpha)$ находится из условий:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\alpha + c_3\alpha^2 + c_4 e^{-k\alpha} = 0 \\ c_2 + 2c_3\alpha - c_4 k e^{-k\alpha} = 0 \\ 2c_3 + c_4 k^2 e^{-k\alpha} = 0 \\ -c_4 k^3 e^{-k\alpha} = 1 \end{cases}$$

Откуда $c_3 = \frac{1}{2k}$, $c_4 = -\frac{e^{k\alpha}}{k^3}$, $c_2 = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$, $c_1 = \frac{\alpha^2}{2k} + \frac{\alpha}{k^2} + \frac{1}{k^3}$, следовательно,

$$\varphi(x,\alpha) = \frac{\alpha^2}{2k} + \frac{\alpha}{k^2} + \frac{1}{k^3} - (\frac{\alpha}{k} + \frac{1}{k^2})x + \frac{x^2}{2k} - \frac{1}{k^3} e^{k(\alpha - x)} \text{ и}$$

$$Y = \int\limits_{x_{0,}}^{x} [\frac{\alpha^2}{2k} + \frac{\alpha}{k^2} + \frac{1}{k^3} - (\frac{\alpha}{k} + \frac{1}{k^2})x + \frac{x^2}{2k} - \frac{1}{k^3} e^{k(\alpha - x)}) \cdot f(\alpha) d\alpha$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-kx} + \int\limits_{x_{0,}}^{x} [\frac{\alpha^2}{2k} + \frac{\alpha}{k^2} + \frac{1}{k^3} - (\frac{\alpha}{k} + \frac{1}{k^2})x + \frac{x^2}{2k} - \frac{1}{k^3} e^{k(\alpha - x)}) \cdot f(\alpha) d\alpha, \quad \forall x_0$$

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y^{(IV)} + k^2 y'' = f(x)$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z^{(IV)} + k^2 z'' = 0$ имеет вид:

$$z(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx$$

Аналогично примеру 9, для данного уравнения функция $\varphi(x,\alpha)$ находится из условий:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\alpha + c_3 \cos k\alpha + c_4 \sin k\alpha = 0 \\ c_2 - c_3 k \sin k\alpha + c_4 k \cos k\alpha = 0 \\ -k^2 c_3 \cos k\alpha - k^2 c_4 \sin k\alpha = 0 \\ c_3 k^3 \sin k\alpha - c_4 k^3 \cos k\alpha = 1 \end{cases}$$

Откуда $c_1 = -\frac{\alpha}{k^2}$, $c_2 = \frac{1}{k^2}, c_3 = \frac{\sin k\alpha}{k^3}, c_4 = -\frac{\cos k\alpha}{k^3}$, следовательно,

$$\varphi(x,\alpha) = -\frac{\alpha}{k^2} + \frac{x}{k^2} + \frac{1}{k^3}(\sin k\alpha \cos kx - \sin kx \cos k\alpha) = \frac{x - \alpha}{k^2} - \frac{1}{k^3} \sin k(x - \alpha))$$

И по формуле (5),

$$Y = \int\limits_{x_0}^{x} [\frac{x - \alpha}{k^2} - \frac{1}{k^3} \sin k(x - \alpha)] \cdot f(\alpha) d\alpha.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx + \int\limits_{x_0}^{x} [\frac{x - \alpha}{k^2} - \frac{1}{k^3} \sin k(x - \alpha)] \cdot f(\alpha) d\alpha, \quad \forall x_0$$

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y^{(IV)} - 2y'' + y = f(x)$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения $z^{(IV)} - 2z'' + z = 0$ имеет вид:

$$z = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{x} + c_4 x e^{-x}.$$

Аналогично примеру 9, для данного уравнения функция $\varphi(x,\alpha)$ находится из условий:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} + c_3 \alpha e^{\alpha} + c_4 \alpha e^{-\alpha} = 0 \\ c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha} + c_3 e^{\alpha} + c_3 \alpha e^{\alpha} + c_4 e^{-\alpha} - c_4 \alpha e^{-\alpha} = 0 \\ c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} + 2c_3 e^{\alpha} + c_3 \alpha e^{\alpha} - 2c_4 e^{-\alpha} + c_4 \alpha e^{-\alpha} = 0 \\ c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha} + 3c_3 e^{\alpha} + c_3 \alpha e^{\alpha} + 3c_4 e^{-\alpha} - c_4 \alpha e^{-\alpha} = 1 \end{cases}$$

Откуда $c_3 e^{\alpha} = c_4 e^{-\alpha}$, поэтому данную систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} + 2c_3 \alpha e^{\alpha} = 0 \\ c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha} + 2c_3 e^{\alpha} = 0 \\ c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha} + 6c_3 e^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

Откуда $c_3 = \frac{1}{4} e^{-\alpha}$, $c_4 = \frac{1}{4} e^{\alpha}$, $c_1 = -\frac{1}{4}(\alpha + 1) e^{-\alpha}$, $c_2 = \frac{1}{4}(1 - \alpha) e^{\alpha}$, следовательно,

$$\varphi(x,\alpha) = e^{(x-\alpha)}[-\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} + \frac{x}{4}] + e^{-(x-\alpha)}[\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} + \frac{x}{4}].$$

И по формуле (5),

$$Y = \frac{1}{4}\int_{x_0,}^{x} [(x - \alpha - 1)e^{(x-\alpha)} + (x + \alpha - 1)e^{-(x-\alpha)}] \cdot f(\alpha) d\alpha, \quad \forall x_0.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{x} + c_4 x e^{-x} + \frac{1}{4}\int_{x_0,}^{x} [(x - \alpha - 1)e^{(x-\alpha)} + (x + \alpha - 1)e^{-(x-\alpha)}] \cdot f(\alpha) d\alpha, \quad \forall x_0$$

Список используемой литературы

1. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Минск: Высш. шк. , 1974. – 766 с.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва: Наука , 1969. – 320с.
3. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – СПб: Лань , 2002. – 432 с.
4. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.
5. Шилин, А.П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры/ А.П. Шилин. – Минск :РИВШ, 2008. – 366 с.
6. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников – Москва: Наука , 1985. – 231.